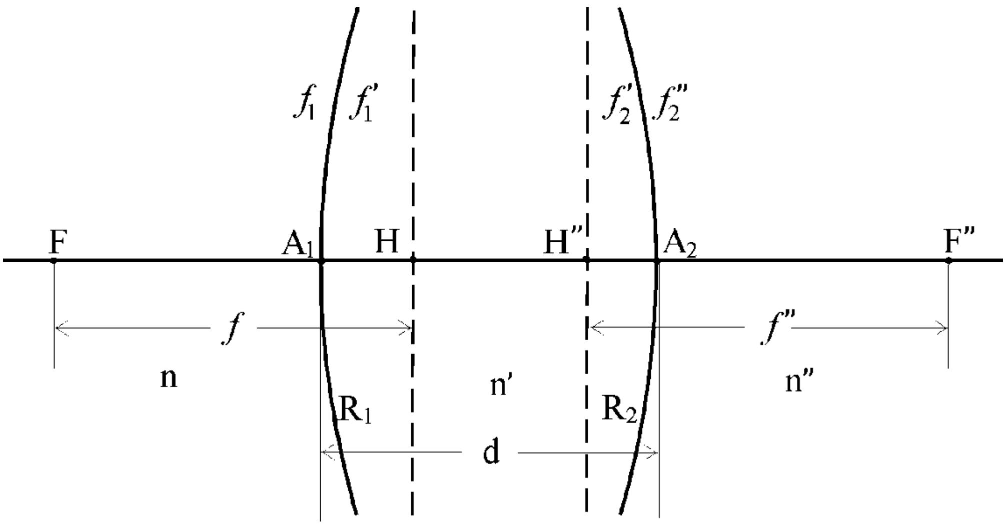
Izvođenje Gausovih jednačina za debelo sočivo

Posmatrajmo optički sistem koji se sastoji od dve sferne površine, poluprečnika R_1 i R_2 koje se nalaze na međusobnom rastojanju *d,* a koje razdvajaju tri optički različite sredine, indeksa prelamanja n, n' i n" (slika 1). Žižne daljine prve sferne površine ćemo označiti sa f_1 i f_1', a druge sa f_2' i f_2''. Njihove vrednosti su određene preko optičkih moći prve i druge sredine, ω_1 i ω_2, na osnovu relacija:

$$\frac{n}{f_1}=\frac{n'}{f_1'}=\omega_1=\frac{n'-n}{R_1} \quad \text{i} \quad \frac{n'}{f_2'}=\frac{n''}{f_2''}=\omega_2=\frac{n''-n'}{R_2} \tag{1}$$

Pod **debelim sočivom** smatramo ono sočivo kod koga se rastojanje između sfernih površina *d* ne može zanemariti u odnosu na njihove poluprečnike R_1 i R_2. Pošto debelo sočivo posmatramo kao sistem sfernih površina, za njegovo opisivanje se uvode glavne ravni i glavne tačke sočiva H i H", na mestima gde optička osa sočiva prolazi kroz glavne ravni. Debelo sočivo ima prvu F i drugu žižu F", **ali se žižne daljine *f* i *f"* u ovom slučaju mere od glavnih tačaka H i H",** kao na slici 1, za razliku od tankog sočiva, gde se žižne daljine mere od temena sfernih površina A_1 i A_2.

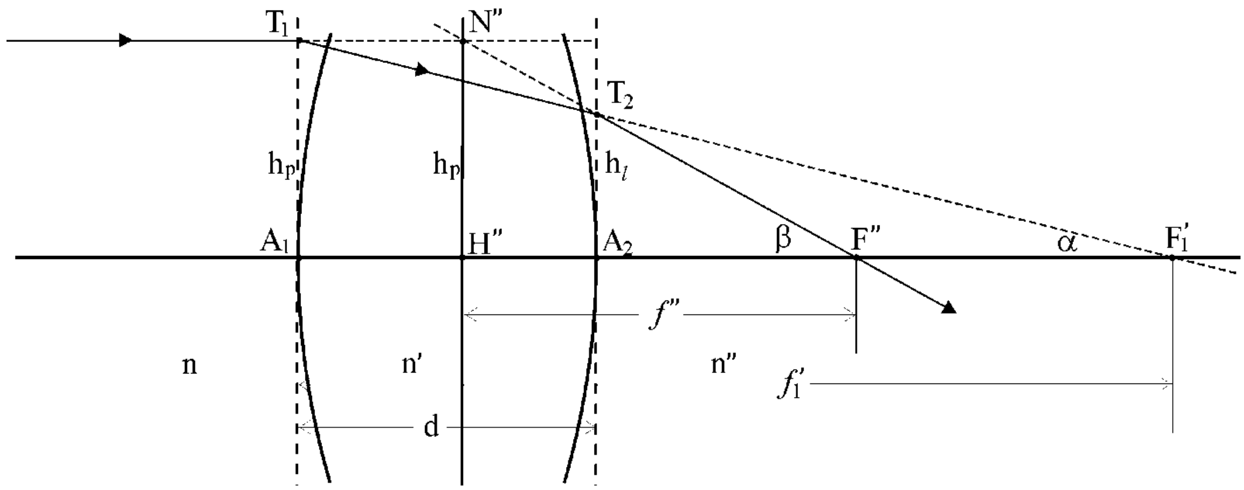


Slika 1. Debelo sočivo kako kombinacija dve sferne površine.

Glavne ravni debelog sočiva sadrže glavne tačke H i H", a karakterišu se time da imaju **jedinično uvećanje.** Njihov položaj se grafički određuje na osnovu preseka produžetaka zraka koji na debelo sočivo upada paralelno sa njegovom optičkom osom i prelama se na prvoj sfernoj površini, i produžetka zraka koji posle prelamanja na drugoj sfernoj površini seče optičku osu u žiži sočiva.

Gausove relacije koje će biti izvedene važe ne samo za debelo sočivo, već i za kombinaciju dva tanka sočiva koja se nalaze na međusobnom rastojanju *d* i koja razdvajaju, u opštem slučaju, tri različite optičke sredine.

Za izvođenje Gausovih jednačina, pođimo od geometrije date na slici 2. Posmatramo zrak koji pada na debelo sočivo paralelno sa optičkom osom. Pretpostavimo da se upadni zrak prelama u tački T_1 na tangenti koja je povučena na sfernu površinu u njenom temanu A_1, a ne na mestu dodira sa površinom. Zrak se zatim prelama na tangenti druge sferne površine u tački T_2 i seče optičku osu u drugoj žiži F". Da nema druge sferne površine, zrak bi nastavio kretanje ka drugoj žiži prve sferne površine F'_1. Visina koja odgovara tački T_1 je h_p, a tački T_2 je h_l. Odgovarajuća rastojanja od tačaka T_1 i T_2 do prve, odnosno druge sferne površine se u aproksimaciji paraksijalnih zrakova mogu smatrati zanemarljivim.



Slika 2. Izvođenje Gausovih jednačina za drugu sfernu površinu.

Iz trougla $A_1T_1F'_1$ sledi da je $tg\alpha=\frac{h_p}{f_1'}$ a iz trougla $A_2T_2F'_1$ sledi $tg\alpha=\frac{h_l}{A_2F_1'}=\frac{h_l}{f_1'-d}$. Njihovim kombinovanjem dobijamo jednakost:

$$\frac{h_p}{h_l}=\frac{f_1'}{f_1'-d} \tag{2}$$

Iz trougla H"N"F" sledi da je $tg\beta=\frac{h_p}{f''}$ a iz trougla A_2T_2F'' sledi $tg\beta=\frac{h_l}{A_2F''}=\frac{h_l}{f''-H''A_2}$, odakle se dobija veza:

$$\frac{h_p}{h_l}=\frac{f''}{f''-H''A_2}. \tag{3}$$

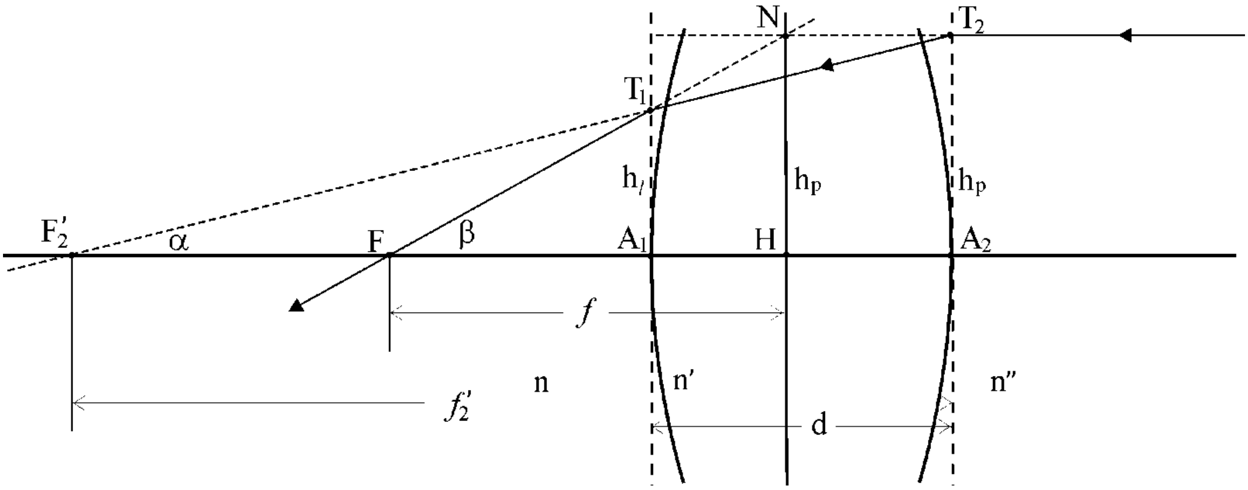
Kombinovanjem relacija (2) i (3), dobijamo da je:

$$H''A_2=f''\frac{d}{f_1'}, \qquad \text{ili} \qquad A_2H''=-f''\frac{d}{f_1'}, \tag{4}$$

gde smo znak „-„ uveli da bi istakli činjenicu da se rastojanje meri u smeru od desna na levo. Sa slike 2 se vidi da je rastojanje $A_2F'' = f''-H''A_2$, što na osnovu relacije 4 daje vezu:

$$A_2F'' = f''\left(1-\frac{d}{f_1'}\right). \tag{5}$$

Relacije (4) i (5) nam omogućavaju da odredimo položaj druge glavne tačke H" i druge žiže F" debelog sočiva u odnosu na teme A_2 druge sferne površine. Da bismo odredili položaj prve glavne tačke H i prve žiže F debelog sočiva u odnosu na A_1 posmatrajmo sliku 3. Zrak sada dolazi iz suprotnog pravca, paralelno sa optičkom osom, prelama se u tačkama T_2 i T_1 i seče optičku osu u prvoj žiži debelog sočiva, F. Sada je visina koja odgovara tački T_2 je h_p, a tački T_1 je h_l.



Slika 3. Izvođenje Gausovih jednačina za prvu sfernu površinu.

Iz trougla $A_2T_2F'_2$ sledi da je $tg\alpha = \frac{h_p}{f_2'}$ a iz trougla $A_1T_1F'_2$ sledi $tg\alpha = \frac{h_l}{A_1F_2'} = \frac{h_l}{f_2'-d}$. Njihovim kombinovanjem dobijamo jednakost:

$$\frac{h_p}{h_l} = \frac{f_2'}{f_2'-d} \tag{6}$$

Iz trougla HNF sledi da je $tg\beta = \frac{h_p}{f}$ a iz trougla A_1T_1F sledi $tg\beta = \frac{h_l}{A_1F} = \frac{h_l}{f-A_1H}$, odakle se dobija veza:

$$\frac{h_p}{h_l} = \frac{f}{f-A_1H}. \tag{7}$$

Kombinovanjem relacija (6) i (7), dobijamo da je:

$$A_1H = f\frac{d}{f_2'}. \tag{8}$$

Sa slike 3 se vidi da je rastojanje $A_1F = f - A_1H$ što na osnovu relacije (8) daje vezu:

$$A_1F = -f\left(1-\frac{d}{f_2'}\right), \tag{9}$$

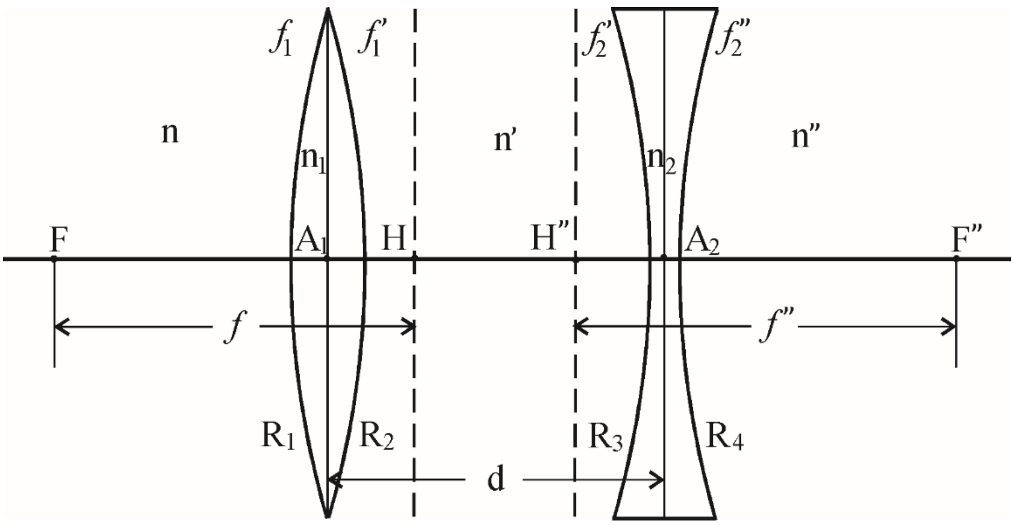
gde znak „–„ ponovo ističe činjenicu da se rastojanje meri u smeru od desna na levo. Da bismo upotpunili Gausov sistem jednačna (4,5) i (8,9) za debelo sočivo, potrebno je da navedemo i relaciju koja daje vezu između optičkih moći sfernih površina ω_1 i ω_2 datih relacijom (1) i optičke moći debelog sočiva ω. Može se pokazati da važi relacija:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 - \frac{d}{n'}\omega_1\omega_2 . \tag{10}$$

Ako sa optičkih moći pređemo na odgovarajuće žižne daljine, dobijamo relaciju:

$$\frac{n}{f} = \frac{n'}{f_1'} + \frac{n''}{f_2''} - \frac{d n''}{f_1' f_2''} = \frac{n''}{f''} \tag{11}$$

U kojoj smo uveli vezu između optičke moći i prve i druge žižne daljine debelog sočiva. Ako se sa obe strane debelog sočiva nalazi ista optička sredina, onda je $n = n''$ i jednake su prva i druga žižna daljina, $f = f''$.



Slika 4. Kombinacija dva tanka sočiva kao debelo sočivo.

Sistem jednačina (4,5) i (8-11) se može primeniti i u slučaju kombinacije dva tanka sočiva (slika 4), ali tada u njima figurišu odgovarajuće žižne daljine prvog i drugog sočiva. Ako posmatramo sistem od dva tanka sočiva, od materijala indeksa prelamanja n_1 i n_2, i sa poluprečnicima krivina prvog sočiva R_1 i R_2, a drugog R_3 i R_4), onda su njihove optičke moći i žižne daljine date jednačinama:

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n'}{f_1'} = \omega_1^1 + \omega_1^2 = \frac{n_1 - n}{R_1} + \frac{n' - n_1}{R_2} = \omega_1 , \tag{12}$$

$$\frac{n''}{f_2''}=\frac{n'}{f_2'}=\omega_2^1+\omega_2^2=\frac{n_2-n'}{R_3}+\frac{n''-n_2}{R_4}=\omega_2, \tag{13}$$

gde su optičke moći prvog i drugog sočiva (ω_1 i ω_2) određena kao zbir optičkih moći odgovarajućih sfernih površina, koje u opštem slučaju razdvajaju različite optičke sredine. Kod primene sistema (4,5) i (8-11) u slučaju kombinacije sočiva, sva rastojanja se uzimaju od centara sočiva, to jest A_1 se poklapa sa O_1, a A_2 sa O_2.

Gausove jednačine za debelo sočivo:

$\frac{n}{f}=\frac{n'}{f_1'}+\frac{n''}{f_2''}-\frac{d\,n''}{f_1'\,f_2''}=\frac{n''}{f''}$
$\omega=\omega_1+\omega_2-\frac{d}{n'}\omega_1\omega_2$
$A_1H=f\frac{d}{f_2'}$; $\quad A_1F=-f\left(1-\frac{d}{f_2'}\right)$
$A_2H''=-f''\frac{d}{f_1'}$; $\quad A_2F''=f''\left(1-\frac{d}{f_1'}\right)$

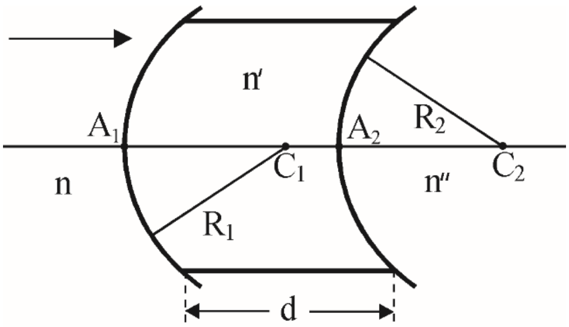
Primer 1.

Posmatrajmo debelo sočivo sledećih karakteristika: poluprečnik prve sferne površine r_1=+1,5 cm, druge r_2=+1,5 cm, njihovo međusobno rastojanje d= 2 cm, indeks prelamanja materijala sočiva n' =1,60. Zraci upadaju na sočivo iz vazduha (n=1) a posle prelamanja se prostiru kroz sredinu indeksa prelamanja n'' = 1,30. Odrediti:

a) žižne daljine pojedinačnih sfernih površina,

b) žižne daljine debelog sočiva,

c) položaje prve i druge žiže F i F'', kao i položaje glavnih tačaka debelog sočiva H i H'', u odnosu na temena sfernih površina.



Slika 5. Debelo sočivo sa datim karakteristikama.

Rešenje: Debelo sočivo sa karakteristikama datim u primeru je predstavljeno na slici 5. Pošto su obe sferne površine pozitivnog znaka, sledi da su obe konveksne prema upadnom zraku, koji je označen strelicom na levoj strani slike 5.

a) Za prvu sfernu površinu, veza između žižnih daljina i optičke moći je data sledećim izrazom:

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n'}{f_1'} = \frac{n' - n}{R_1} = \frac{1.60 - 1.00}{+1.5cm} = +0.40\frac{1}{cm} = \omega_1.$$

$$f_1 = \frac{1.00}{+0.40\ 1/cm} = +2.50cm, \qquad f_1' = \frac{1.60}{+0.40\ 1/cm} = +4.00cm.$$

- Za drugu sfernu površinu veza između žižnih daljina i optičke moći je data sa:

$$\frac{n'}{f_2'} = \frac{n''}{f_2''} = \frac{n'' - n'}{R_2} = \frac{1.30 - 1.60}{+1.5cm} = -0.20\frac{1}{cm} = \omega_2.$$

$$f_2' = \frac{1.60}{-0.20\ 1/cm} = -8.00cm, \qquad f_2'' = \frac{1.30}{-0.20\ 1/cm} = -6.50cm.$$

b) Žižne daljine debelog sočiva f i f'', nalazimo na osnovu njihove veze sa optičkom moći ω:

$$\frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} = \omega,$$

koja se u slučaju debelog sočiva izračunava preko optičkih moći prve i druge sferne površine:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 - \frac{d}{n'}\omega_1\omega_2,$$

$$\omega = +0.40 - 0.20 - \frac{2.00}{1.60}(+0.40)(-0.20) = +0.30\frac{1}{cm}.$$

$$f = \frac{1.00}{0.30\ 1/cm} = +3.33\ cm,$$

$$f'' = \frac{1.30}{0.30\ 1/cm} = +4.33\ cm.$$

c) Položaje žižnih tačaka u odnosu na temena sfernih površina nalazimo na osnovu izraza:

$$A_1F = -f\left(1 - \frac{d}{f_2'}\right) = -3.33\left(1 - \frac{2.00}{-8.00}\right) = -4.16\ cm,$$

gde znak „–„ označava da rastojanje merimo u levo u odnosu na teme A_1. Slično, za položaj druge žiže dobijamo:

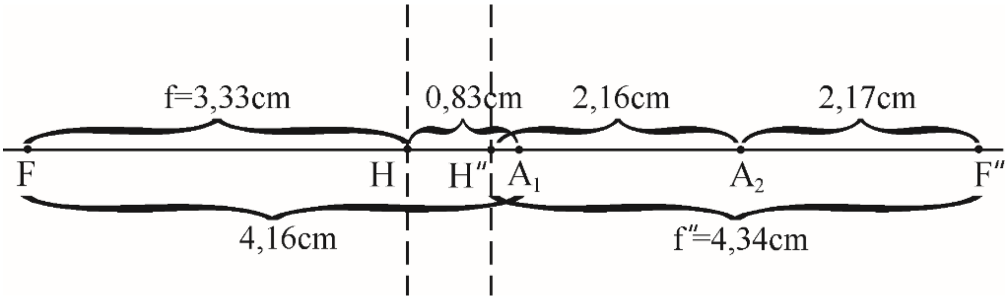
$$A_2F'' = f''\left(1 - \frac{d}{f_1'}\right) = +4.33\left(1 - \frac{2.00}{+4.00}\right) = +2.17\ cm.$$

Položaje glavnih tačaka određujemo na osnovu izraza:

$$A_1H = f\frac{d}{f_2{}'} = +3.33\frac{2.00}{-8.00} = -0.83\ cm,$$

$$A_2H'' = -f''\frac{d}{f_1{}'} = -4.33\frac{2.00}{+4.00} = -2.16\ cm.$$

Zbog postojanja znaka minus u prethodnim izrazima, oba rastojanja merimo u levo od temena sfernih površina. Na osnovu izračunatih vrednosti, debelo sočivo sada možemo predstaviti ekvivalentnom slikom (slika 6), na kojoj su označene žižne daljine i glavne tačke sočiva. Ekvivalentna slika nam omogućava da primenimo jednačine koje smo izveli kod tankog sočiva, uz napomenu da se kod debelog sočiva rastojanja mere od glavnih tačaka H i H', a ne od temena sfernih površina.



Slika 6. Položaj glavnih ravni i žižnih tačaka debelog sočiva predstavljenog na slici 5.

Primer 2.

Ekvikonveksno sočivo poluprečnika krivine 4cm, od stakla indeksa prelamanja n_1=1,50, se nalazi 2cm ispred ekvikonkavnog sočiva poluprečnika 6cm, od stakla indeksa prelamanja n_1=1,60. Sredine koje okružuju sočiva, imaju sledeće indekse prelamanja: n=1,00; n'=1,33 i n'' = 1,00 (vazduh, voda, vazduh). Koristeći metodologiju debelog sočiva odrediti:

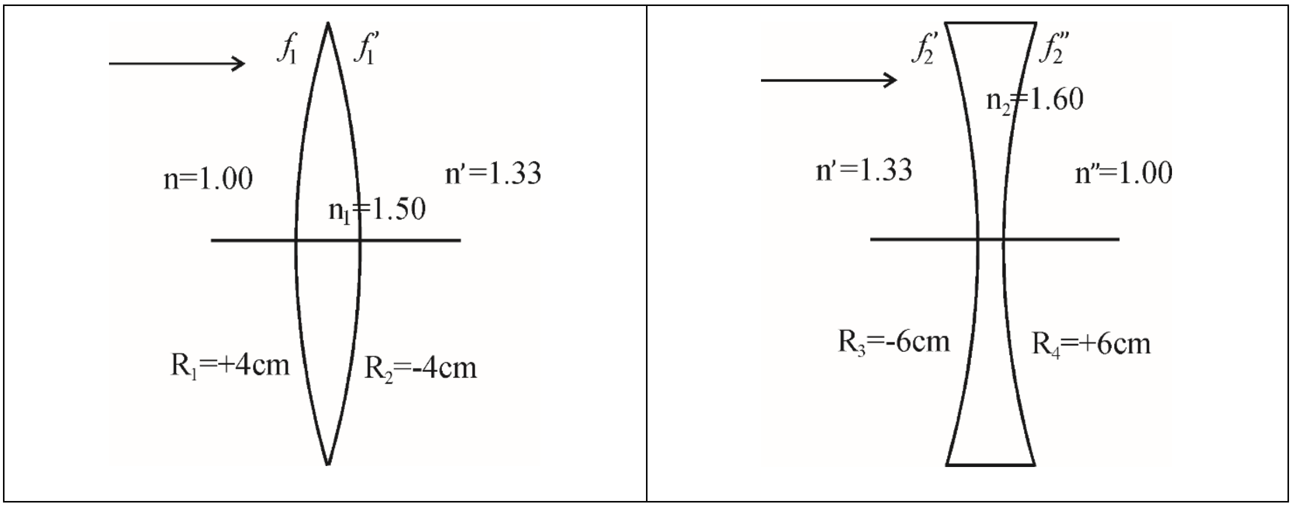
a) optičku moć kombinacije sočiva,

b) žižne daljine i položaje žiža ovog sistema,

c) položaje glavnih tačaka sistema sočiva.

Rešenje: Opisana kombinacija sočiva odgovara onoj na slici 4. Pojam ekvikonveksno sočivo označava da obe sferne površine imaju poluprečnike istih apsolutnih vrednosti, ali se tokom računanja uzimaju sa različitim predznakom, u zavisnosti od toga kako su postavljene u odnosu na pravac upadnog zraka. Isto važi i za ekvikonkavno sočivo.

a) Da bi se odredila optička moć kombinacije sočiva, potrebno je prvo odrediti optičke moći pojedinačnih sočiva, koja ovde posmatramo kao tanka. Na slici 7 su predstavljena ekvikonveksno i ekvikonkavno sočivo, sa označenim numeričkim vrednostima potrebnim za proračune.



Slika 7. Podaci potrebni za izračunavanje optičke moći i žižne daljine: a) ekvikonveksnog sočiva, b) ekvikonkavnog sočiva.

Na osnovu sistema jednačina 12 za tanko sočivo, za ekvikonveksno sočivo dobijamo:

$$\frac{n}{f_1}=\frac{n'}{f_1{}'}=\frac{n_1-n}{R_1}+\frac{n'-n_1}{R_2}=\frac{1.50-1.00}{+4.0cm}+\frac{1.33-1.50}{-4.0cm}=+0.1675\frac{1}{cm}=16.75D=\omega_1.$$

$$f_1{}'=\frac{1.33}{+0.1675\ 1/cm}=7.94cm\approx 8cm.$$

Dok za ekvikonkavno sočivo dobijamo:

$$\frac{n'}{f_2{}'}=\frac{n''}{f_2{}''}=\frac{n_2-n'}{R_3}+\frac{n''-n_2}{R_4}=\frac{1.60-1.33}{-6.0cm}+\frac{1.00-1.60}{+6.0cm}=-0.145\frac{1}{cm}=-14.50D=\omega_2.$$

$$f_2{}'=\frac{1.33}{-0.145\ 1/cm}=-9.17cm\approx -9.2cm.$$

Optička moć kombinacije sočiva je sada:

$$\omega=\omega_1+\omega_2-\frac{d}{n'}\omega_1\omega_2=+0.1675\frac{1}{cm}-0.145\frac{1}{cm}-\frac{2cm}{1.33}\left(+0.1675\frac{1}{cm}\right)\left(-0.145\frac{1}{cm}\right)=$$

$$=+0.059\frac{1}{cm}=+5.9D.$$

b) Na osnovu veze optičke moći i žižnih daljina, nalazimo:

$$\frac{n}{f}=\frac{n''}{f''}=\omega,\rightarrow f=\frac{n}{\omega}\ i\ f''=\frac{n''}{\omega}.$$

Pošto je n=n''=1, za žižne daljine dobijamo:

$$f = f'' = \frac{1.00}{+0.059\,\frac{1}{cm}} = 16.95\ cm \approx 17cm$$

Rastojanje žiža u odnosu na centre tankih sočiva A_1 i A_2 računamo na osnovu izraza:

$$A_1F = -f\left(1 - \frac{d}{f_2{}'}\right) = -17cm\left(1 - \frac{2.00cm}{-9.2cm}\right) = -20.8\ cm,$$

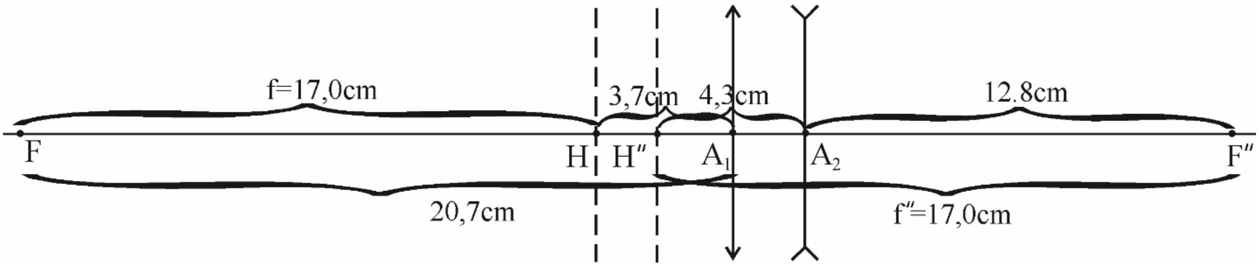
$$A_2F'' = f''\left(1 - \frac{d}{f_1{}'}\right) = 17cm\left(1 - \frac{2.00cm}{8.0cm}\right) = +12.8\ cm.$$

d) Položaje glavnih ravni i glavnih tačaka H i H'' u odnosu na A_1 i A_2 računamo na osnovu izraza:

$$A_1H = f\frac{d}{f_2{}'} = +17.0cm\frac{2.00cm}{-9.2cm} = -3.70\ cm,$$

$$A_2H'' = -f''\frac{d}{f_1{}'} = -17.0cm\frac{2.00cm}{+8.00} = -4.30\ cm.$$

Na osnovu izračunatih vrednosti pod a), b) i c) sada možemo nacrtati sistem ekvivalentan kombinaciji ekvikonveksnog i ekvikonkavnog sočiva, na slici 8.



Slika 8. Položaj glavnih ravni i žižnih tačaka debelog sočiva ekvivalentnog sistemu tankog sabirnog (strelice ka spolja) i rasipnog sočiva (strelice ka unutra).